8. Robni problem lastnih vrednosti

Albert Horvat

4. oktober 2005

1 Uvod

Za majhna prečna nihanja prosto viseče težke vrvi smo izpeljali enačbo

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dz}{dy}\right)+\frac{\omega^2}{g}z=0, \tag{1}$$

kjer z pomeni amplitudo in y koordinato vzdolž vrvi, šteto od prostega konca navzgor. Zanimajo nas tri najnižje lastne frekvence ω in pripadajoči načini nihanja. Za gravitacijski pospešek sem vzel $g = 10m/s^2$. Za robna pogoja postavimo

$$z(0) = \text{omejeno} \qquad z(l) = 0. \tag{2}$$

Postavil sem $z(0) = 1$ in $l = 10$. Pri analitičnem reševanju dobimo Besselove funkcije

$$J_0(j_{0s}\sqrt{\frac{y}{l}})$$

kjer je j_{0s} s-ta ničla funckije J_0. Tako dobimo $\omega = 1/2\sqrt{g/l}j_{0s}$

Pri numeričnem reševanju preizkusimo strelsko metodo, uvedbo nove spremenljivke, ter metodo diagonalizacije.

2 Numerično reševanje

Definicijsko območje razdelimo na N enakih intervalov in vzamemo $h = l/N$, ter $y_i = y_0 + ih$. Odvode v vmesnih točkah, torej za $i = 1,\ldots,N-1$ aproksimiramo s simetričnimi diferencami:

$$\frac{dz}{dy}|_{y=y_i} = z_i^{'} \approx \frac{z_{i+1}-z_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}|_{y=y_i} = z_i^{''} \approx \frac{z_{i+1}-2z_i+z_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

Vstavimo to v enačbo (1), pomnožimo s h, pa dobimo:

$$i(z_{i+1}-2z_i+z_{i-1})+\frac{1}{2}(z_i-Z_{i-1})+hpz_i=0, \qquad hp=h\frac{\omega^2}{g}=\frac{l\omega^2}{Ng} \tag{5}$$

Robni pogoj pove, da je $z_N = 0$. Do sedaj imamo $N-1$ enačb. Pri prostem koncu vrvi $y = 0$ velja $\frac{d^2z}{dy^2} = 0$, prvi odvod pa aproksimiramo z nesimetrično diferenco:$z^{'} = \frac{z_{n+1}-z_n}{h}$. Tako dobimo še zadnjo N-to enačbo:

$$z_0(hp-1)+z_1=0$$

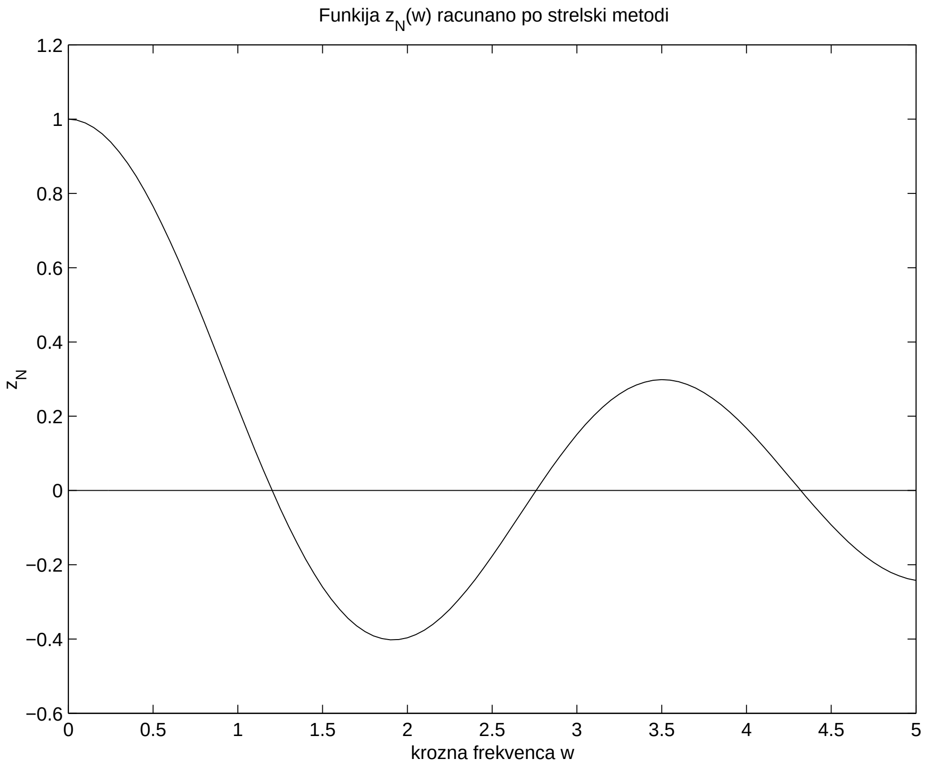
Lastna vrednost hp je tista, pri kateri ima sistem netrivialno rešitev.

2.1 Strelska metoda

Pri strelski metodi rešujemo začetni problem

$$\begin{aligned} z'' &= f(y, z, z') \\ z(0) &= \alpha \\ z'(0) &= \xi \end{aligned}$$

Sedaj iščemo vrednost ξ pri kateri zadenemo v $z(l) = 0$. V našem primeru lahko nastavimo parameter p tako, da dobimo $z(l) = 0$. Postopek je torej sledeč: Vzamemo neko začetno vrednost parametra p (streljamo), po sistemu enačb (5) izračunamo z_N, primerjamo z robnim pogojem ($z_N = 0$), in ustrezno popravljamo (večamo ali manjšamo) vrednost p. Ko dosežemo predpisano natančnost, končamo. Parameter p in lastna frekvenca ω sta enolično povezana, tako da lahko za argument podam tudi slednje. Da ne bi čaral z bisekcijo, tangentno metodo, inverzno interpolacijo, sem za iskanje ničle naše novo definirane funkcije uporabil kar v Matlab vgrajeno funkcijo *fzero* v obliki $fzero(@strelska, \omega)$, kjer je $z = strelska(\omega)$ funkcija, ki vrne z_N pri izbranem ω. Tako z lahkoto poiščemo pri izbrani delitvi intervala ustrezne lastne frekvence in lastna nihanja. Na grafu (1) vidimo da prve tri ničle lezijo blizu točk $1, 2.5, 4.5$, tako da podamo te vrednosti pri

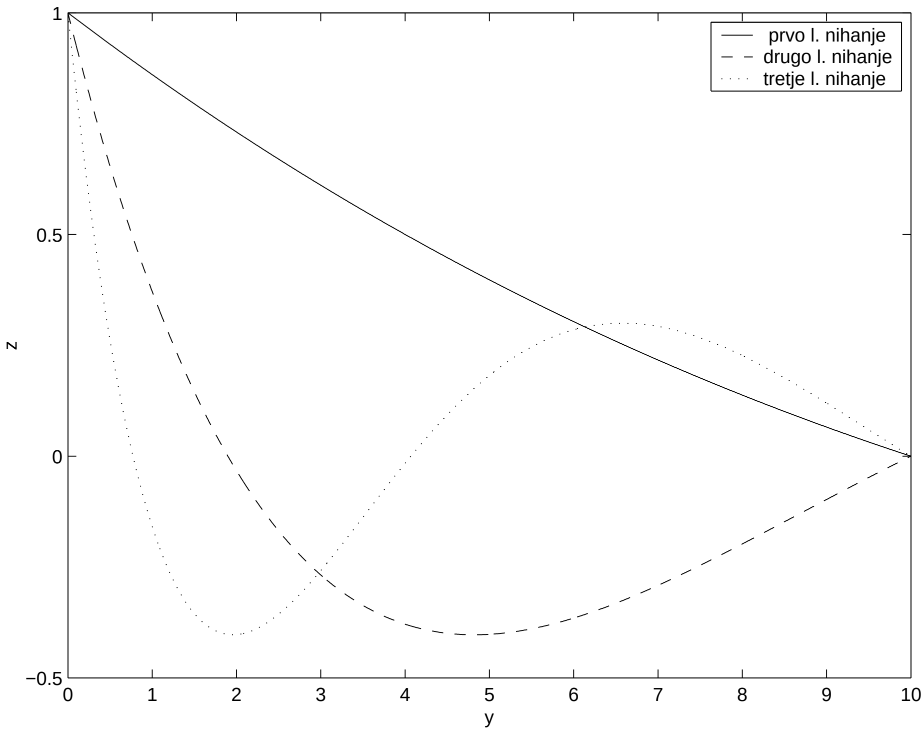


Slika 1: graf funkcije katere ničle iščemo, tu je N=100

iskanju ničel z $fzero$. Rezultati so vidni v naslednji tabeli. ω_{bes} so referenčne vrednosti, katere sem dobil z iskanjem prvih treh ničel besselove funkcije J_0.

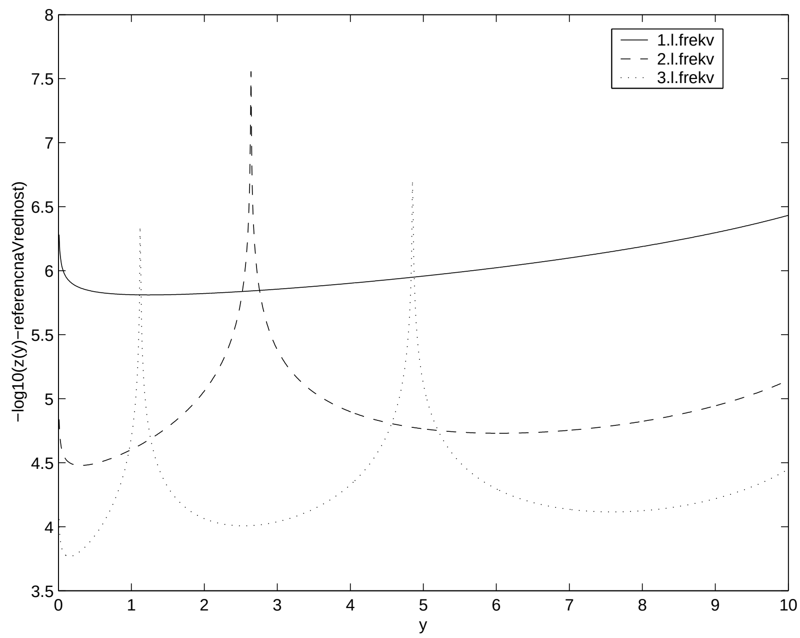
	$\omega_{strel} N = 100$	$\omega - \omega_{bes}$	$\omega_{strel} N = 1000$	$\omega - \omega_{bes}$
ω_1	1.2024	$3.5578e-005$	1.2024	$3.5575e-007$
ω_2	2.7590	$1.0549e-003$	2.7600	$1.0532e-005$
ω_3	4.3203	$6.5993e-003$	4.3268	$6.5436e-005$

Vidimo, če povečamo število delilnih točk za faktor 10, dobimo za za faktor 100 natančnejše vrednosti. Lahko si še ogledamo razliko referencne funckije $J_0(j_{0s}\sqrt{(y/l)})$ za $s = 1, 2, 3$ in



Slika 2: Prva tri lastna nihanja po strelski metodi, N=1000, torej h=0.01

funkcije izracunane po strelski metodi. Spet sem vzel za N=1000. Na sliki (3)vidimo, da je prva



Slika 3: Napaka lastnih funkcij, N=1000

lastna funkcija najbolj natančno določena, vse višje so že manj natančne. To je veljalo tudi za lastne vrednosti. O časih računanja pa lahko povem le malo, ker sem uporabil for zanke, katere se počasi izvajajo znotraj matlaba v primerjavi z vgrajenimi funkcijami. Vseeno:za izračun ω za 100 točk sem porabil $0.078s$, za 1000 točk pa ogromnih $1.25s$.

2.2 Diagonalizacija

Pri diagonalizaciji zapišemo v matriko koeficiente pred z_i, kjer teče $i = 0, \ldots, N-1$. Dobimo torej sledečo matriko in sistem:

$$\begin{pmatrix} hp-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & hp-2 & \frac{3}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & hp-4 & \frac{5}{2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & N-\frac{5}{2} & hp-2(N-2) & N-\frac{3}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & N-\frac{3}{2} & hp-2(N-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Upošteval sem, da je $z_n = 0$. Uvedemo sedaj matriko $B = A - (hp)I$, kjer je A zgornja matrika. Dobimo enačbo $B\mathbf{x} = (hp)\mathbf{x}$, kar je enačba za lastne vrednosti matrike B. Korak h poznamo, iščemo krožno frekvenco ω, ki je v zvezi s p,$\omega = \sqrt{pg}$. Ko poznamo lastne vrednosti, iz pripadajočih lastnih vektorjev razberemo obliko vrvi. Uporabil sem 100 točk. Vidimo (4) da je rešitev res prava. Težava pa je, da je metoda časovno požrešna. Pri 100 točkah še ni problema (čas računanjea=0.06 s), pri 1000 pa je računalnik porabil več kot 10 sekund. Lastne vrednosti so vidni v naslednji tabeli. Ugotovimo, da so rezultati identični kot pri strelski metodi.

	ω_{diag}	$\omega_{diag} - \omega_{bes}$
ω_1	1.2023	$3.5579e-005$
ω_2	2.7590	$1.0549e-003$
ω_3	4.3203	$6.5993e-003$

3 Nova spremenljivka

Po uvedbi nove spremenljivke enačbo (1) prevedemo na naslednjo obliko:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + u = 0, \qquad u(o) = -\frac{du}{dx}(0) = 1. \tag{6}$$

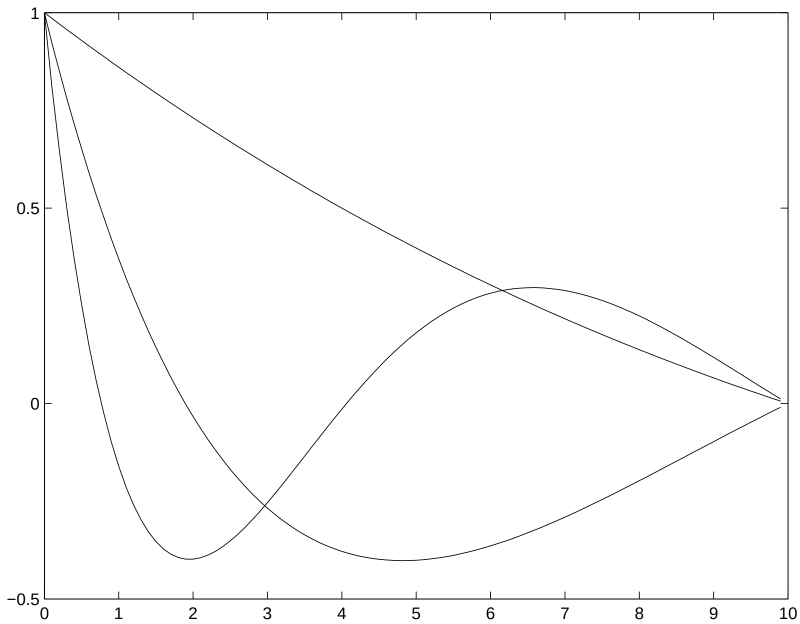
Enačbo rešujemo s poljubno začetno vrednostjo($u = 1$), in z odvodom ($u' = -u = -1$). Ko imamo rešitev, poiščemo njene ničle x_0, ter iz njih dobimo lastne vrednosti, ki so v naslednji zvezi z ničlami:

$$\omega = \sqrt{\frac{x_0 g}{l}}$$

Za reševanje uoprabimo metodo Runge-Kutta. Enačbo seveda prevedemo na dve, ki sta prvega reda. Pri RK metodi sem vzel toleranco 10^{-6}, za lastne vrednosti pa sem dobil naslednje vrednosti:

	ω	$\omega - \omega_{bes}$
ω_1	$1.2024e+000$	$-8.1645e-008$
ω_2	$2.7600e+000$	$4.9059e-008$
ω_3	$4.3269e+000$	$-3.6165e-007$

Rezultati so še kar natančni, za računanje pa sem porabil $0.047s$.



Slika 4: Lastni vektorji v matriko zapisanega problema, N=100

4 Programčki

```
function [rez,int,graf]=strelska(w)
%izracuna lastno frekvenco, terlastno funkcijo
%pri zacetni vrednosti p
%
%N je stevilo intervalov
N=1000;
%l je dolzina intervala
l=10;
%g je gravitacijski pospesek
g=10;
h=l/N;
p=(w.^2)/g;
%vzamem za zacetni odmik 1
%izracunam kam sem zadel z mojo spremenljivko p:
len=length(p);
for k=1:len
    pk=p(k);
    z(1)=1;
    z(2)=z(1)*(1-h*pk);
    for j=2:N
        z(j+1)=(1/((j-1)+1/2))*(-1)*((h*pk-2*(j-1))*z(j)+((j-1)-1/2)*z(j-1));
    end
    rez(k)=z(N+1);
    graf(:,k)=z';
end
%narise z_N v odvisnosti od zacetne krozne frekvence
%plot(w,rez)
%narise nihajni nacin za izbrano krozne frekvence
int=[0:h:l]';
%plot(int,graf)

function diagonalizacija
tic
N=100;
%velikost koraka
l=10;
h=l/N;
%zapisem glavno diagonalo brez prvega clena
v=2*[1:(N-1)];
%s prvim clenom
```

```
v=-[1 v];
v=v';
%zapisem zgornjo obdiagonalo brez prvega clena
vz=[1:(N-2)]+1/2;
%s prvim clenom
vz=[1 vz];
vz=vz';
%spodnja diagonala
vs=[1:(N-1)]-1/2;
vs=vs';
%zapisem vse to v matriko
X=diag(v,0)+diag(vz,1)+diag(vs,-1);
%poiscem lastne vektorje in vrednosti:
%v matriki V se skrivajo lastni vektroji
%v matriki D se skrivajo lastne vrednosti
%velja X*V=V*D;
[V,D] = eig(X);
x=[0:h:(l-h)]';
plot(x,V(:,22)/V(1,22),x,V(:,23)/V(1,23),x,V(:,24)/V(1,24))
toc

function [t,y,te,ye,ie]=rkmetoda(interval,toleranca)
%dolzina intervala od 0 do i:[0 interval]
i=interval;
%Pri toleranci podaj samo eksponent t: 10^-t
t=toleranca;
options = odeset('RelTol',10^(-t),'AbsTol',[10^(-t) 10^(-t)],'Events',@events);
[t,y,te,ye,ie]=ode45(@difenacba,[10^(-15) i],[1;0],options);
%plot(t,y(:,1))

function sistem=difenacba(t,y)
sistem=[y(2);-1/t*(y(1)+y(2))];

function   [value,isterminal,direction]=events(t,y)
%tu so zapisani pogoji za iskanje nicle
value=y(1);
isterminal=0;
direction=0;

function w=nicleStrelska
%poisce lastne frekvence, ter narise nihajne nacine
w1=fzero(@strelska,1);
w2=fzero(@strelska,2.5);
w3=fzero(@strelska,4.5);
w=[w1 w2 w3]';

function f=beslova(z)
bes=@besselj;
f=feval(bes,0,z);

function w=nicleBeselova
%poiscem nicle besslove funkcije
j01=fzero(@beslova,2.4);
j02=fzero(@beslova,5.5);
j03=fzero(@beslova,8.6);
%pridelam iz tega krozne frekvence
w=1/2*[j01 j02 j03]';
```